

*І.-О.Р. Ступницький<sup>1</sup>, Р.М. Ступницький<sup>1</sup>, С.І.Трубаков<sup>2</sup>*

## Методика дослідження анатомічних дефектів зубощелепної системи для вибору ортопедичної конструкції

<sup>1</sup>Івано-Франківський національний медичний університет, м. Івано-Франківськ, Україна<sup>2</sup>Національний технічний університет України Київський політехнічний інститут ім. ІгоряСікорського,  
м. Київ, Україна

**Актуальність дослідження.** Біомеханіка зубощелепної системи, її проблеми та шляхи вирішення є однією з основних проблем сучасної стоматології. Різноманітні аспекти цього питання, такі як сила навантаження, напруження, які виникають як в опорних зубах, так і в місцях дефекту в залежності від величини атрофії коміркового паростка, стабільність оклюзії, компенсаторно-приспосувальна функція періодонта й ін., присвячено чимало досліджень.

**Мета дослідження:** створення математичної моделі залежності навантаження, що виникають у ділянці зуба, та ортопедичної конструкції в залежності від величини атрофії коміркового паростка нижньої щелепи.

**Матеріали та методи.** Для дослідження було застосовано математичні аспекти підходу до визначення напружень у залежності від величини атрофії кісткової тканини коміркового паростка нижньої щелепи.

**Результати та обговорення.** Такі математичні моделі дозволять лікарям-клініцистам швидко продіагностувати клінічну ситуацію і зробити необхідні висновки про вибір методу лікування. Універсальна математична модель дозволяє дослідити залежність напруження в будь-якому зубі, яке виникає при жувальному навантаженні, та величини атрофії в залежності від зносу кісткової тканини коміркового паростка нижньої щелепи.

**Висновки.** Розроблено математичну модель впливу напружень в зубі від величини атрофії кісткової тканини. Уперше отримано формулу, яка зв'язує напруження, що виникають у зубі, з величиною атрофії тканини кістки. Уперше отримано формулу для визначення максимальних напружень у залежності від атрофії кісткової тканини. Наводиться графік розподілення напружень в основі зуба в залежності від величини атрофії (показано  $\sigma_{max}$  та  $\sigma_{min}$  напруження). Дана математична модель дозволяє прогнозувати майбутнє руйнування зуба від величини атрофії кістки.

**Ключові слова:** математичне моделювання, атрофія коміркового паростка, напруження, дефект.

### Вступ

На сьогодні сучасна стоматологія має широкі можливості функціонального відновлення зубів і зубних рядів. Завдяки розвитку прогресу сучасні стоматологічні клініки обладнані клінічними та лабораторними сканерами, мікроскопами, персональними комп'ютерами тощо. Сучасне обладнання розширює можливості лікарів-стоматологів при діагностиці патологій зубощелепної системи, значно полегшує вибір оптимального плану ортопедичного лікування й дозволяє провести якісну реабілітацію пацієнтів за допомогою ортопедичних конструкцій. Окреме місце в концепції лікування займає різноманітне програмне забезпечення, що дозволяє скласти план лікування і спрогнозувати його результати, що створює деякі складності, які треба вирішувати лікарю-клініцисту. По-перше, використання програмних продуктів для комп'ютерного розрахунку з використанням побудованої 3D-моделі вимагає від лікаря знань програміста, по-друге, при використанні численних методів розрахунку напружень, які

виникають при навантаженні зубів, необхідно правильно підібрати скінченні елементи, правильно змодельовати навантаження й умови закріплення зуба чи протеза, інакше кажучи, з математичної точки зору граничні умови, і по-третє, програмне забезпечення повинно бути не «піратським», а ліцензійним. І це зрозуміло, чому «піратські» комп'ютерні програми не завжди правильно прораховують і моделюють процеси, і вони заборонені законодавством. Виходячи з цих умов, виникає потреба в математичному моделюванні у стоматології, заснованому на математичних залежностях, які відображають процеси навантаження зубів і протезів. Такі математичні моделі дозволять лікарям-клініцистам швидко продіагностувати клінічну ситуацію і зробити необхідні висновки про вибір методу лікування. Універсальна математична модель дозволяє дослідити залежність напруження в будь-якому зубі, яке виникає при жувальному навантаженні в залежності від величини атрофії та зносу кісткової тканини коміркового паростка нижньої щелепи.

**Матеріали та методи дослідження**

Основні позначення:  $h$  – величина атрофії кісткової тканини (мм),  $L$  – довжина дефекту (впадини) (мм),  $R$  – величина реактивної сили (сили реакції), яка виникає в кістковій тканині при навантаженні зуба ( $H$ ). Точка  $C$  – це центр ваги кісткової тканини в системі координат  $XOY$ .  $F$  – це площа збереженої кісткової тканини в системі координат  $XOY$ .

Статичний момент площі  $S_x$  відносно осі дорівнює добутку всієї площі фігури на відстань від її центру ваги до цієї осі [1], тобто

$$S_x = \int_F y dF;$$

Таким чином, ми можемо аналітично визначити статичний момент площі збереженої частини кістки коміркового паростка в залежності від  $h$  – величини атрофії коміркового паростка.

Введемо поняття статичного моменту [рис. 1] збереженої кісткової тканини.

**Статичний момент площі**

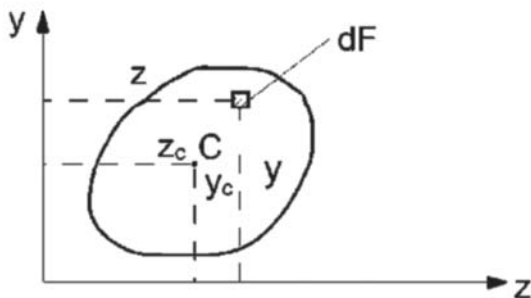


Рис. 1.

$dS_z = YdF$ ,  $dS_y = ZdF$  – статичні моменти елементарної площі  $dF$  відносно осі  $z$  і осі  $Y$ .

Статичні моменти площі  $F$  відносно осі  $z$  і осі  $Y$ .

$$S_z = \int_F YdF; \quad S_y = \int_F ZdF$$

Якщо  $C$  – центр ваги площі, а  $Z_c$ ,  $Y_c$  – координати центра ваги, статичні моменти площі  $F$  можна визначити за формулами  $S_z = Y_c F$ ;  $S_y = Z_c F$ . Звідси координати центра ваги:

$$Y_c = \frac{S_z}{F}; \quad Z_c = \frac{S_y}{F}.$$

**Вплив на напруження в зубі в залежності від величини атрофії кісткової тканини, що його оточує**

Числовим показником атрофії є величина атрофії кісткової тканини  $h$ . Для встановлення впливу напруження на зуб у залежності від атрофії кісткової

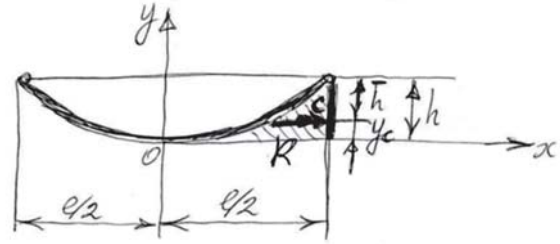


Рис. 2.

тканини спочатку визначимо, наскільки змінюється положення реактивної сили кісткової тканини  $R$  в залежності від ступеня атрофії  $h$ .

$$F = \frac{1}{3} \times \frac{l}{2} \times h = \frac{l \times h}{6}.$$

Для визначення зміни положення реактивної сили, яка виникає в кістковій тканині коміркового паростка в залежності від ступеня атрофії цієї кістки, знайдемо вираз для статичного моменту площі збереженої частини кістки. Інтегрування відбувається по довжині дефекту кісткової тканини. Статичний момент цієї площі відносно осі  $OX$  [рис. 2]:

$$\begin{aligned} S_x &= \int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_0^{y(x)} y dy = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(y(x))^2}{2} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \left( \frac{4 \times h \times x^2}{l^2} \right) \times \frac{1}{2} \times dx = \\ &= \frac{8 \times h}{l^4} \int_0^{\frac{1}{2}} x^4 \times dx = \frac{8 \times h}{l^4} \times \left( \frac{1}{2} \right)^5 = \frac{h^2 \times l}{20}. \end{aligned}$$

Знайдемо зміну положення реактивної сили  $R$  у залежності від ступеня атрофії кісткової тканини коміркового паростка:

$$\bar{h} = h - y_c = h - \frac{S_x}{F} = h - \frac{h^2 \times l \times 6}{20 \times l \times h} = 0,7h.$$

Тепер виведемо аналітичну залежність між максимальним напруженням, яке виникає в зубі під дією жувального навантаження, та величиною атрофії кісткової тканини. Нехай жувальне навантаження  $P$  буде прикладене під кутом  $\alpha$ . Ширину зуба в його основі позначимо через  $b$ , товщину через  $t$ .  $H$  – висота зуба. Розглянемо жувальне навантаження на зуб. Нехай сила  $P$  жувального навантаження направлена довільно на зуб під кутом  $\alpha$ . **Розглянемо найбільш загальний випадок навантаження.** На рисунку ми бачимо розподіл навантаження на зуб біля дефекту у вигляді атрофії кісткової тканини [рис. 3].

Визначимо напруження, які виникають у зубі під дією жувального навантаження  $P$  у загальному випадку, коли навантаження прикладене до зуба під кутом  $\alpha$ . Проектуючи довільну силу жувального навантаження на горизонтальну та вертикальну площини, одержимо відповідно  $P_z = P \cos \alpha$  та  $P_y = P \sin \alpha$ .

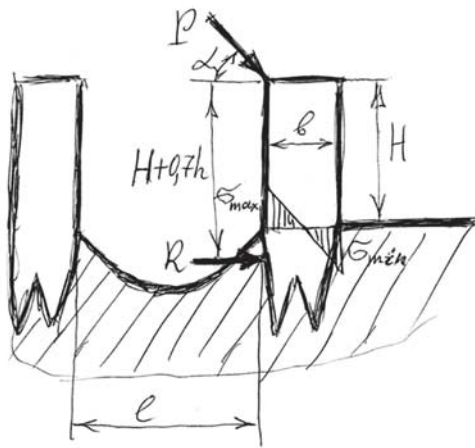


Рис. 3.

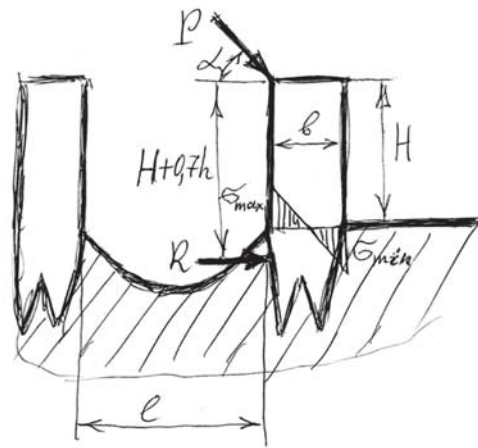


Рис. 5.  $H$  – висота зуба,  $b$  – ширина,  $t$  – товщина.

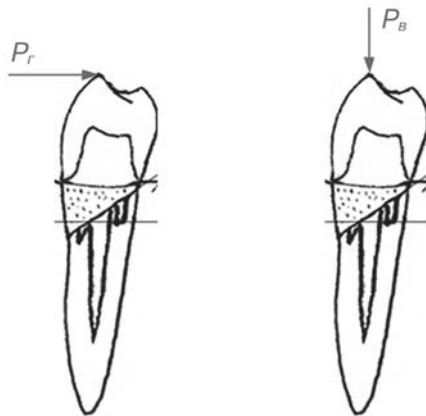


Рис. 4.

Горизонтальна складова  $P_r$  утворює напруження згинання, а вертикальна складова утворює напруження стискання.

Застосуємо метод математичного моделювання та розрахунку на міцність [1]. У цьому випадку напруження визначаються як [4]:

$$\sigma = \sigma_{\text{згинання}} + \sigma_{\text{стискання}},$$

$$\text{де } \sigma_{\text{згинання}} = \frac{M}{W} - \text{напруження згинання,}$$

$$\sigma_{\text{стискання}} = \frac{P_v}{F} - \text{напруження стискання.}$$

Згинальний момент знаходимо як  $M = P_r \times (H + 0,7h)$ ,  $W$  – момент опору,  $F$  – площа поперечного перерізу зуба.

Момент опору буде дорівнювати  $W = (t \times b^2) / 6$ , а площа поперечного перерізу зуба  $F = t \times b$ . Якщо вважати, що поперечний переріз зуба має форму кола, тоді  $W_{\text{кола}} = (\pi \times d^3) / 32$  – це момент опору поперечного перерізу зуба у вигляді кола, і площа буде дорівнювати  $F_{\text{кола}} = (\pi \times d^2) / 4$ .

Слід підкреслити, що напруження згинання будуть більше, ніж напруження стискання, і тому вони більш небезпечні.

Графік розподілення напружень в основі зуба від величини атрофії (показані  $\sigma_{\text{max}}$  та  $\sigma_{\text{min}}$  напруження). Розподіл напруження по ширині зуба в його основі має такий вигляд [рис. 5].

$$\sigma_{\text{згинання max}} = \frac{P \cos \alpha (H + 0,7h)}{(t \times b^2) / 6}.$$

Знайдемо повне напруження:

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma_{\text{згин}} + \sigma_{\text{стиск}} = \frac{P \cos \alpha (H + 0,7h)}{(t \times b^2) / 6} + \frac{P \sin \alpha}{tb} = \\ &= \frac{6P \cos \alpha (H + 0,7h)}{tb^2} + \frac{P \sin \alpha}{tb}. \end{aligned} \quad (1)$$

Якщо поперечний переріз зуба змодельємо у формі кола, то формула (1) спрощується:

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma_{\text{згин}} + \sigma_{\text{стиск}} = \frac{P \cos \alpha (H + 0,7h)}{(\pi \times d^3) / 32} + \frac{4P \sin \alpha}{\pi d^2} = \\ &= \frac{32P \cos \alpha (H + 0,7h)}{\pi d^3} + \frac{4P \sin \alpha}{\pi d^2}. \end{aligned} \quad (2)$$

### Висновки

1. Розроблено математичну модель впливу напружень у зубі в залежності від величини атрофії кісткової тканини.
2. Уперше отримано формулу, яка зв'яже напруження, що виникають у зубі, з величиною атрофії  $h$  тканини кістки.
3. Уперше отримано формулу для визначення максимальних напружень у залежності від атрофії кісткової тканини.
4. Наводиться графік розподілення напружень в основі зуба в залежності від величини атрофії (показані  $\sigma_{\text{max}}$  та  $\sigma_{\text{min}}$  напруження).
5. Дана математична модель дозволяє прогнозувати величину майбутнього руйнування зуба від величини атрофії кістки  $h$ .

## ПОСИЛАННЯ

1. Pysarenko H.S., Kvitka E.S., Umanskiy E.S. Opir materialiv. – K. Vshcha shkola, 2004. – 654 s.
2. Mylnikov O.V. Opir materialiv. – Ternopil: Vydavnytstvo TNTU, 2010. – 257 s.
3. Strelnikov M.A. – Poltava: Ukrainyskiy stomatolohichnyi almanakh, 2004. – № 3–4, s. 52–53.
4. Ozhohan Z.R., Shanetskiy I.P. Visnyk stomatolohii № 4, 2001. – S. 64–67.
5. Koshlev A.A., Klemyn V.A. Visnyk stomatolohii № 2, 2000. – S. 24–26.

### Методика исследования анатомических дефектов зубочелюстной системы для выбора ортопедической конструкции

*И.-О.Р. Ступницький, Р.М. Ступницький, С.И. Трубачев*

**Актуальность исследования.** Биомеханика зубочелюстной системы, ее проблемы и пути решения являются одной из основных проблем современной стоматологии. Различные аспекты этого вопроса, такие как сила нагрузки, возникающие напряжения как в опорных зубах, так и в местах дефекта в зависимости от величины атрофии воротникового роста, стабильность окклюзии, компенсаторно-приспособительная функция периодонта и др., посвящено множество исследований.

**Цель исследования:** создание математической модели зависимости нагрузки, возникающих в области зуба, и ортопедической конструкции в зависимости от величины атрофии ячеистого побега нижней челюсти.

**Материалы и способы.** Для исследования были применены математические аспекты подхода к определению напряжений в зависимости от величины атрофии костной ткани ячеистого побега нижней челюсти.

**Результаты и обсуждение.** Такие математические модели позволяют врачам-клиницистам быстро продиагностировать клиническую ситуацию и сделать необходимые выводы о выборе метода лечения. Универсальная математическая модель позволяет исследовать зависимость напряжения в любом зубе, возникающем при жевательной нагрузке, и величины атрофии в зависимости от износа костной ткани ячеистого побега нижней челюсти.

**Выводы.** Разработана математическая модель воздействия напряжений в зубе от величины атрофии костной ткани. Впервые получена формула, связывающая возникающие в зубе напряжения с величиной атрофии ткани кости. Впервые получена формула для определения максимальных напряжений в зависимости от атрофии костной ткани. Приводится график распределения напряжений в основе зуба в зависимости от величины атрофии (показано  $\sigma_{max}$  и  $\sigma_{min}$  напряжение). Данная математическая модель позволяет прогнозировать предстоящее разрушение зуба от величины атрофии кости.

**Ключевые слова:** математическое моделирование, атрофия воротникового роста, напряжение, дефект.

### Research methodology anatomical defects of the dental system for a choice of an orthopedic design

*I.-O. Stupnitskiy, R. Stupnitskiy, S. Trubachov*

**The relevance of research.** Biomechanics of the dentition, its problems and solutions are one of the main problems of modern dentistry. Various aspects of this issue, such as load force, emerging stresses both in the abutment teeth and in the places of the defect, depending on the magnitude of the atrophy of the collar spine, the stability of the occlusion, compensatory-adaptive function of the periodontium, etc., a lot of research has been devoted.

**Purpose of the study:** creation of a mathematical model of the dependence of the load arising in the area of the tooth, and orthopedic wild design, depending on the magnitude of atrophy of the cellular shoot of the lower jaw.

**Materials and methods.** For the study, the mathematical aspects of the approach to determining the stresses in depending on the amount of atrophy of the bone tissue of the cellular shoot of the lower jaw.

**Results and discussion.** Such mathematical models will allow clinicians to quickly diagnose clinical situation and draw the necessary conclusions about the choice of treatment method. A universal mathematical model allows you to explore dependence of the tension in any tooth that occurs during chewing load, and the magnitude of atrophy, depending on wear of the bone tissue of the cellular shoot of the lower jaw.

**Conclusions.** A mathematical model of the effect of stresses in the tooth from the magnitude of bone tissue atrophy has been developed. First a formula is obtained that connects the stresses arising in the tooth with the magnitude of atrophy of the bone tissue. First received the formula for determining the maximum stresses depending on the atrophy of the bone tissue. Tensions at the base of the tooth depending on the magnitude of atrophy ( $\sigma_{max}$  and  $\sigma_{min}$  stress are shown). Given mathematically the model makes it possible to predict the forthcoming destruction of the tooth from the magnitude of bone atrophy.

**Key words:** mathematical modeling, collar growth atrophy, tension, defect.

*Ілля-Олесь Ростиславович Ступницький – аспірант кафедри стоматології інституту післядипломної освіти Івано-Франківського національного медичного університету, м. Івано-Франківськ, Україна.*

*Ростислав Миколайович Ступницький – професор, д-р. мед. наук, заслужений лікар України, кафедра стоматології інституту післядипломної освіти Івано-Франківського національного медичного університету.*

*Сергій Іванович Трубачов – канд. тех. наук, доцент кафедри динаміки і міцності машин та опору матеріалів Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського», м. Київ, Україна.*